Exercise 1.2.67

a. If $xy = xz$, and $x \neq 0$, then $y = z$

$$y = y \cdot 1 \quad (Id\cdot)$$

$$y = y \cdot (x \cdot x^{-1}) \quad (Inv\cdot), (x \neq 0)$$

$$y = (y \cdot x) \cdot x^{-1} \quad (A\cdot)$$

$$y = (x \cdot y) \cdot x^{-1} \quad (C\cdot)$$

$$y = (x \cdot z) \cdot x^{-1} \quad (\text{Assumption})$$

$$y = (z \cdot x) \cdot x^{-1} \quad (C\cdot)$$

$$y = z \cdot (x \cdot x^{-1}) \quad (A\cdot)$$

$$y = z \cdot 1 \quad (Inv\cdot)$$

$$y = z \quad (Id\cdot)$$

b. If $xy = x$, and $x \neq 0$, then $y = 1$

$$y = y \cdot 1 \quad (Id\cdot)$$

$$= y \cdot (x \cdot x^{-1}) \quad (Inv\cdot) \quad (x \neq 0)$$

$$= (y \cdot x) \cdot x^{-1} \quad (A\cdot)$$

$$= (x \cdot y) \cdot x^{-1} \quad (C\cdot)$$

$$= x \cdot x^{-1} \quad (\text{assumption})$$

$$= 1 \quad (Inv\cdot)$$

c. If $xy = 1$, and $x \neq 0$, then $y = x^{-1}$

$$
\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 \quad (\text{Id}) \\
&= y \cdot (x \cdot x^{-1}) \quad (\text{Inv}) \quad (x \neq 0) \\
&= (y \cdot x) \cdot x^{-1} \quad (\text{A}) \\
&= (x \cdot y) \cdot x^{-1} \quad (\text{C}) \\
&= 1 \cdot x^{-1} \quad (\text{Assumption}) \\
&= x^{-1} \quad (\text{Id})
\end{aligned}
$$

d. If $x \neq 0$, then $(x^{-1})^{-1} = x$

$$
\begin{aligned}
(x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} &= 1 \quad (\text{Inv}) \\
(x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} &= x \cdot x^{-1} \quad (\text{Inv}) \\
\therefore (x^{-1})^{-1} &= x \quad (\text{cancellation})
\end{aligned}
$$